

Examen blanc de Mathématiques

2ème année Baccalauréat - Sciences PC et SVT

Réalisé par Youssef SEMHI
Contact 0644127117 / 0708875223

Exercice 1

Soit (u_n) une suite telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4} \quad \text{et } u_0 = 1$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n > 0$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n$.
3. Montrer que (u_n) est décroissante puis qu'elle est convergente.
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
5. En déduire la limite de (u_n) .
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.
 - (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), S_n \leq 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.
 - (b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4$.

Exercice 2

Un sac contient 6 jetons indiscernables au toucher et numérotés : 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 2. On tire au hasard, successivement et sans remise 3 jetons du sac.

On considère les événements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3 »

B : « Le premier jeton porte le numéro 2 »

1.
 - (a) Montrer que : $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$
 - (b) Calculer $P_B(A)$
 - (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse
2. Soit X la variable aléatoire associée à la somme des numéros portés par les trois jetons tirés
 - (a) Déterminer les valeurs prises par la variable X
 - (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X

Exercice 3

On considère dans l'espace les points : $A(1; 0; 1)$, $B(0; -4; 4)$, $C(3; -4; 5)$, et la sphère (S) dont une équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$$

- (a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2; -2; 3)$ et de rayon 3.
 (b) Vérifier que $A \in (S)$ puis écrire une équation cartésienne du plan (P) tangent à (S) en A .
- (a) Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k},$$

et en déduire que

$$2x - 5y - 6z + 4 = 0$$

est une équation du plan (ABC) .

- (b) Montrer que (ABC) et (P) sont orthogonaux.
 (c) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on déterminera son centre H et son rayon.
- Montrer que (Γ) est le cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 4

On considère dans le repère complexe $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ tels que :

$$a = i, \quad b = 2\sqrt{3} - i, \quad c = \sqrt{3} + 2i, \quad d = \sqrt{3} - 2i.$$

- Soit la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et $M(z')$ l'image de $M(z)$ par R .
 (a) Montrer que l'écriture complexe de R est :

$$z' = -iz - 1 + i.$$

 (b) Vérifier que $c' = 1 + (1 - \sqrt{3})i$ est l'affixe du point C' , image du point C par la rotation R .
- Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $k = \sqrt{3}$.
 (a) Montrer que D est l'image du point C' par l'homothétie h .
 (b) Vérifier que :

$$\frac{d - a}{c - a} = -\sqrt{3}i,$$

puis en déduire (AC, AD) .

- Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
 (a) Déterminer l'image du point D par la translation t .
 (b) Montrer que le quadrilatère $ACBD$ est un rectangle.

Problème :

Partie A

Soit une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
- Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau des variations de g
- Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

Et (C_f) son graphe dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ (Unité 1 cm)

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter le résultat géométrique
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$
3. a) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 b) Dresser le tableau de variation de f , en justifiant votre réponse
 c) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point $A(1; 1)$
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} , définie sur un intervalle J que l'on précisera
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]\frac{1}{2}, 1[$ (On prend $f(\frac{1}{2}) = -0.2$)
6. Tracer (T) , (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$
7. a) Montrer que :

$$\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx = 6$$

- b) Par une intégration par parties, montrer que : $\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx = 3e^4 - e^2$
- c) Calculer l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (Ox) et les droites $x = e^4$ et $x = e^2$

Correction

Corrige exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4}$$

1)

Récurrence :

Initialisation : $u_0 = 1 > 0$. La propriété est vraie.

Hérédité : Supposons $u_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4} > 0 \quad \text{car} \quad u_n > 0 \text{ et } u_n + 4 > 0$$

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2)

On a :

$$u_n \geq 0 \iff u_n + 4 \geq 4 \iff \frac{1}{u_n + 4} \leq \frac{1}{4} \iff \frac{3}{u_n + 4} \leq \frac{3}{4} \iff \frac{3u_n}{u_n + 4} \leq \frac{3}{4}u_n$$

3)

u_n est décroissance : $u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n < u_n$ (car $\frac{3}{4} < 1$ et $u_n > 0$)

u_n est minorée par 0 et décroissante, donc convergente

4)

Initialisation : $u_0 = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^0 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$ vraie

Hérédité : $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$, alors :

$$u_{n+1} \leq \frac{3}{4}u_n \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

Conclusion : par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$

5)

D'après la question 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \text{ car } \frac{3}{4} \in]0, 1[$$

et puisque : $0 < u_n$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

6)

a) D'après la question 4 :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

$$S_n \leq 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$$

b) Quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4(1 - 0) = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq 4$$

Corrige exercice 2 :

On considère les événements suivants :

A : « La somme des numéros obtenus est égale à 3 »

B : « Le premier jeton porte le numéro 2 »

1)

a) Calcul de $P(A)$ et $P(B)$

Nombre total de tirages possibles :

$$A_6^3 = 120$$

Calcul de $P(A)$:

$$\text{Cas favorables} = A_4^3 = 24$$

$$P(A) = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}$$

Calcul de $P(B)$:

$$\text{Cas favorables} = 2 \times A_5^2 = 2 \times (5 \times 4) = 40$$

$$P(B) = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

b) Calcul de $P_B(A)$

$$P_B(A) = 0 \quad (\text{car si le premier jeton est 2, la somme minimale est 4})$$

c) Indépendance de A et B

$$P(A \cap B) = 0$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \neq 0$$

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

2)

a) Valeurs possibles de X

$$X \in \{3, 4, 5\}$$

b) Loi de probabilité de X

x_i	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculs pour la loi de X

$$X = 3 : \text{trois "1"} \rightarrow A_4^3 = 24$$

$$X = 4 : \text{deux "1" et un "2"} \rightarrow 3 \times A_4^2 \times A_2^1 = 72$$

$$X = 5 : \text{un "1" et deux "2"} \rightarrow 3 \times A_4^1 \times A_2^2 = 24$$

Corrige exercice 3 :

1)

a) Centre et rayon de (S) L'équation de la sphère est :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 6z + 8 = 0$$

On a :

$$x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$$

$$y^2 + 4y = (y + 2)^2 - 4$$

$$z^2 - 6z = (z - 3)^2 - 9$$

Donc :

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 - 17 + 8 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$$

Conclusion : S est une sphere deCentre $\Omega(2; -2; 3)$ Rayon $R = \sqrt{9} = 3$ b) **Vérification de $A \in (S)$ et plan tangent (P)** Vérifions que $A(1; 0; 1) \in (S)$:

$$1^2 + 0^2 + 1^2 - 4(1) + 4(0) - 6(1) + 8 = 1 + 0 + 1 - 4 + 0 - 6 + 8 = 0$$

On a $\overrightarrow{\Omega A}$ est une vecteur normal sur (P) , donc :

$$\overrightarrow{\Omega A} = (-1, 2, -2)$$

Équation du plan (P) :

$$-1(x - 1) + 2(y - 0) - 2(z - 1) = 0$$

$$-x + 1 + 2y - 2z + 2 = 0$$

$$(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$$

2)

a) Détermination de l'équation de (ABC)

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -4, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, -4, 4)$$

Produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -4 & 3 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 12\vec{k}$$

Équation du plan (ABC) :

$$-4(x-1) + 10(y-0) + 12(z-1) = 0$$

$$-4x + 4 + 10y + 12z - 12 = 0$$

$$\boxed{(ABC) : 2x - 5y - 6z + 4 = 0}$$

b) On a les vecteurs normaux :

$$\vec{n}_P = (1, -2, 2)$$

$$\vec{n}_{ABC} = (2, -5, -6)$$

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_{ABC} = 1 \times 2 + (-2) \times (-5) + 2 \times (-6) = 2 + 10 - 12 = 0$$

Conclusion : Les plans sont orthogonaux.c) **Intersection** $(ABC) \cap (S) = \Gamma$ Distance de Ω à (ABC) :

$$d = \frac{|2(2) - 5(-2) - 6(3) + 4|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-6)^2}} = \frac{|4 + 10 - 18 + 4|}{\sqrt{65}} = 0$$

Comme $d = 0$, $\Omega \in (ABC)$ et Γ est un cercle de rayon 3.

3)

Vérification de $B, C \in (S)$:Pour $B(0; -4; 4)$:

$$0^2 + (-4)^2 + 4^2 - 4(0) + 4(-4) - 6(4) + 8 = 0 \implies 0 + 16 + 16 - 0 - 16 - 24 + 8 = 0$$

Pour $C(3; -4; 5)$:

$$3^2 + (-4)^2 + 5^2 - 4(3) + 4(-4) - 6(5) + 8 = 0 \implies 9 + 16 + 25 - 12 - 16 - 30 + 8 = 0$$

donc

 $A, B, C \in (ABC)$ (par définition) et $A, B, C \in (S)$ (vérifié ci-dessus), donc $A, B, C \in \Gamma$. Ω est équidistant de A, B , et C (distances = 3).

$$\|\overrightarrow{\Omega A}\| = \sqrt{(1-2)^2 + (0+2)^2 + (1-3)^2} = 3,$$

$$\|\overrightarrow{\Omega B}\| = \sqrt{(0-2)^2 + (-4+2)^2 + (4-3)^2} = 3,$$

$$\|\overrightarrow{\Omega C}\| = \sqrt{(3-2)^2 + (-4+2)^2 + (5-3)^2} = 3.$$

Conclusion :

Γ est le cercle circonscrit au triangle ABC .

Corrige exercice 4 :

1)

a) Écriture complexe :

$$z' - i = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - i) = -i(z - i) \implies \boxed{z' = -iz - 1 + i}.$$

b) Image de C :

$$c' = -i(\sqrt{3} + 2i) - 1 + i = \boxed{1 + (1 - \sqrt{3})i}.$$

2)

a) Image de C' :

$$z'' - i = \sqrt{3}(1 - \sqrt{3}i) \implies z'' = \boxed{\sqrt{3} - 2i = d}.$$

b) on a :

$$\frac{d - a}{c - a} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} + i} = \boxed{-\sqrt{3}i} \implies \boxed{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}}.$$

3) Translation t de vecteur $\overrightarrow{AC}$

a) Image de D :

$$d''' = (\sqrt{3} - 2i) + (\sqrt{3} + i) = \boxed{2\sqrt{3} - i = b}.$$

b)

On a :

$$AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4, \quad BC = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$$CD = 4, \quad DA = 2\sqrt{3}$$

Et on a :

$$\frac{d - a}{c - a} = -\sqrt{3}i \Rightarrow \arg \frac{d - a}{c - a} = -\frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

$ACBD$ est un rectangle

Corrige Problème :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln(x)$$

1)

Limite en 0^+ :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(x))$$

$$x \rightarrow 0^+ \text{ donc } x \rightarrow 0$$

$$\ln(x) \rightarrow -\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty}$$

Limite en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$$

$$\text{On a } x : g(x) = x \left(1 - \frac{\ln(x)}{x} \right)$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

2)

Pour tous $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Étude du signe :

Dénominateur $x > 0$ (car $x \in]0; +\infty[$)Numérateur $x - 1$:

$$x - 1 > 0 \iff x > 1$$

$$x - 1 < 0 \iff x < 1$$

Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

3. Montrons que $g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ On a g admet une minimum en $x = 1$: $g(1) = 1 > 0$

$$\boxed{\forall x \in]0; +\infty[, \quad g(x) > 0}$$

Partie B

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

1)2) Limite en 0^+

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)\ln(x) + 1}{x}$$

on a $(x+1)\ln(x) \rightarrow -\infty$ (car $\ln(x) \rightarrow -\infty$)

et on a $x \rightarrow 0^+$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty}$$

Interprétation : La droite $x = 0$ (axe des ordonnées) est asymptote verticale à (C_f) .

2) Limite en $+\infty$ et branche infinie

$$f(x) = \frac{x \ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} = \ln(x) + \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

Étude de la branche infinie :

On calcule :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

Interprétation : (C_f) admet une branche parabolique de direction horizontale (suivant l'axe des abscisses) au voisinage de $+\infty$

3)

a) On a $\forall x \in]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(1 + \frac{1}{x} + \ln(x))x - [(x+1)\ln(x) + 1]}{x^2} = \frac{x - \ln(x)}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \quad \text{où} \quad g(x) = x - \ln(x)}$$

b) Tableau de variations :

$g(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$ (d'après Partie A)

$x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$

Donc $f'(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

x	0^+	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(1) = 1$	$+\infty$

C)

$$f'(1) = \frac{g(1)}{1} = 1$$

Équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$(T) : y = x$$

4)

on a :

 f continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

 f^{-1} Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} et est définie sur $\mathbb{R}$

5)

 f continue et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$

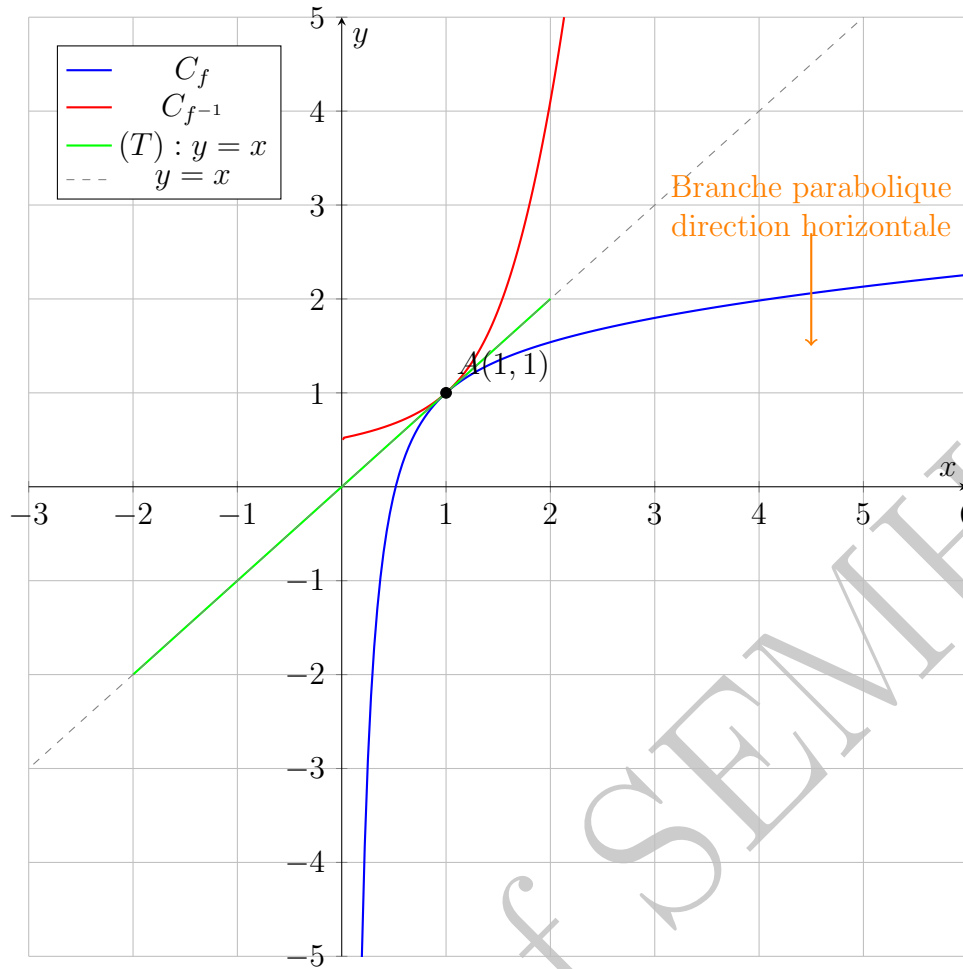
$$f(1/2) \approx -0.2 < 0$$

$$f(1) = 1 > 0$$

D'après le TVI, il existe un unique $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que :

$$f(\alpha) = 0$$

6)



7)

a) $\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx$: Posons $u = \ln(x)$, $du = \frac{1}{x} dx$:

$$\int_2^4 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_2^4 = 6$$

$$\boxed{\int_{e^2}^{e^4} \frac{\ln(x)}{x} dx = 6}$$

b) $\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx$: integration par partie avec $u = \ln(x)$, $v' = 1$ $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$:

$$[x \ln(x) - x]_{e^2}^{e^4} = (4e^4 - e^4) - (2e^2 - e^2)$$

$$\boxed{\int_{e^2}^{e^4} \ln(x) dx = 3e^4 - e^2}$$

c) Aire

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{e^2}^{e^4} f(x) dx = \int_{e^2}^{e^4} \left(\ln(x) + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \right) dx \\&= \underbrace{[x \ln(x) - x]_{e^2}^{e^4}}_{\mathcal{A}_1} + \underbrace{\left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_{e^2}^{e^4}}_{\mathcal{A}_2} + \underbrace{[\ln(x)]_{e^2}^{e^4}}_{\mathcal{A}_3} \\&= (3e^4 - e^2) + 6 + 2 \\&= \boxed{3e^4 - e^2 + 8}\end{aligned}$$

Youssef SEMHI